Die Pfeife einer Orgel bringt einen Ton hervor, weil die Luftmoleküle sich in ihrem Innern hin- und herbewegen und dabei örtlich Verdichtungen und Verdünnungen der Luft erzeugen. Diese dringen nach Außen und gelangen als Schallwellen an unser Ohr. Die Anzahl der Hin- und Herbewegungen oder Schwingungen pro Sekunde, genannt *Frequenz*, bestimmt die Tonhöhe. Je größer die Frequenz, desto höher ist der Ton. Frequenzen misst man in der Einheit Hertz, 1 Hertz (1 Hz) entspricht genau einer Schwingung pro Sekunde. Eine 8 Fuß lange Pfeife beispielsweise ertönt mit 65,41 Hz. In der Musik bezeichnet man die zugehörige Tonhöhe als *C* („groß *C*").

Was die Physik der (Orgel-)Pfeife anbetrifft, beschränken wir uns darauf, die Frequenzen zu berechnen, die eine Pfeife gegebener Länge hervorbringt. Das lässt sich auf Schulniveau tun – wem das zu simpel oder bekannt ist, überspringe die nachfolgende „Theorie". Ein kurzer Blick in den *Gerthsen* [Ger 02] oder ein ähnliches Werk kann aber nicht schaden. Die berechneten Frequenzen vergleichen wir dann mit dem Ergebnis eines Experiments. Auch dieses geht nicht über das Niveau eines Schulphysikkurses hinaus.

Zunächst machen wir uns ein vereinfachtes Modell der Pfeife: ein Rohr, dessen *beide* Enden offen sind. Eine normale Orgelpfeife ist zwar dem Augenschein nach nur an einem der beiden Enden offen – das andere Ende, durch das sie angeblasen wird, wirkt aber wie ein offenes Ende. Wir starten unsere „Theorie" mit der Annahme, dass an den Enden des Rohres der Dichte- und Druckunterschied zur Außenluft Null sein muss. Daher gibt es dort keine Bewegung der Luftmoleküle. Die Schwingung hat, wie man sagt, an den beiden Enden der Pfeife einen *Knoten*[1]. In der Mitte der Pfeife ist die Schwingung dagegen am heftigsten, die Schwingungsweite der Luftmoleküle am größten. Hier befindet sich, physikalisch gesprochen, ein *Schwingungsbauch*. Von den Enden aus steigt die Schwingungsweite zur Mitte hin kontinuierlich an – anfangs schnell, in der Nähe der Mitte langsamer. Theoretisch ergibt sich eine *sinusförmige* Verteilung der Schwingungsweite, und zwar so, dass zwischen den Enden der Pfeife genau eine halbe Sinuswelle Platz hat. Zudem zeigt sich, dass diese Verteilung der Schwingungsweite seine Form und Lage nicht verändert. Es handelt sich, wie man sagt, um eine *stehende Welle*[2].

Die Wellenlänge dieser stehenden Welle ist, da sie nur zur Hälfte in die Länge der Pfeife „passt", das Zweifache der Pfeifenlänge. Bezeichnet man die Pfeifenlänge mit L_0, die Wellenlänge der stehenden Welle mit λ, gilt also

(1) $\lambda = 2L_0 .$

Nun ist die Wellenlänge λ über die Beziehung

(2) $c = \lambda \cdot f$

mit der Frequenz f des akustisch hörbaren Tons verknüpf (c = Schallgeschwindigkeit). Setzt man $\lambda = 2L_0$ aus Gl. (1) in Gl. (2) ein, folgt

(3) $$f = \frac{c}{2L_0} .$$

Dies ist die Frequenz des Grundtons der Pfeife. Weitere Töne, genannt „Obertöne", sind allerdings der Theorie nach auch möglich. Sie entsprechen Schwingungsmustern mit Knoten nicht nur an den Enden der Pfeife, sondern auch im Innern des Rohrs. Bei genau einem Schwingungsknoten in der Mitte wäre die Wellenlänge gleich der Pfeifenlänge, die Frequenz daher doppelt so hoch wie die des Grundtons. Zwei Knoten würden die Pfeifenlänge dritteln, so dass die Wellenlänge ein Drittel der Grundwellenlänge ist. Die Frequenz ist dann das Dreifache der Grundtonfrequenz, usw. Die Oberton-Frequenzen f_n sind damit ganzzahlige Vielfache der Frequenz in Gl. (3), also gegeben durch

(4) $$f_n = \frac{c}{2L_0} \cdot n \quad (n = 1,2,3,...) .$$

Die Zahl *n* nummeriert die möglichen Obertöne (einschließlich Grundton), die auch *Harmonische* genannt werden. Den Grundton bezeichnet man als 1. Harmonische, den ersten Oberton (doppelte Frequenz) als 2. Harmonische, usw. Die Frequenzen der Harmonischen heißen auch Eigenfrequenzen.

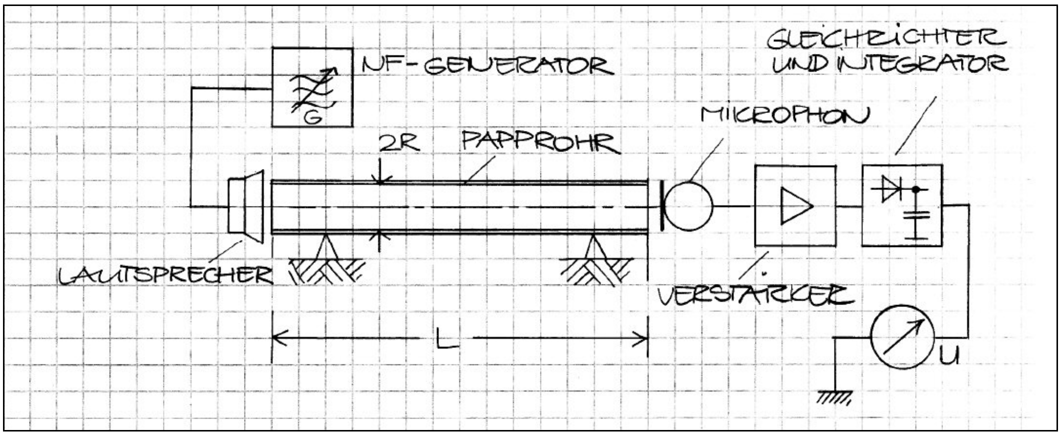

Abbildung 1 Versuchsanordnung. Der Schallpegel wird mit der Schaltung am rechten Ende des Rohres gemessen (Mikrophon, Verstärker, Gleichrichter, Integrator und Voltmeter).

Gleichung (4) lässt sich experimentell mit einfachen Mitteln nachprüfen: Wir benutzen als Pfeifenmodell ein Papprohr von 3,5 cm Durchmesser, das wir an einem Ende mit dem Ton eines Lautsprechers „anblasen“. Der Lautsprecher befindet sich in Verlängerung der Rohrachse etwa 5 cm vom Ende der Pfeife entfernt. Er ist an einen *NF*-Sinusgenerator angeschlossen, dessen Frequenz variiert wird. Eine schematische Darstellung der Messanordnung zeigt Abbildung 1.

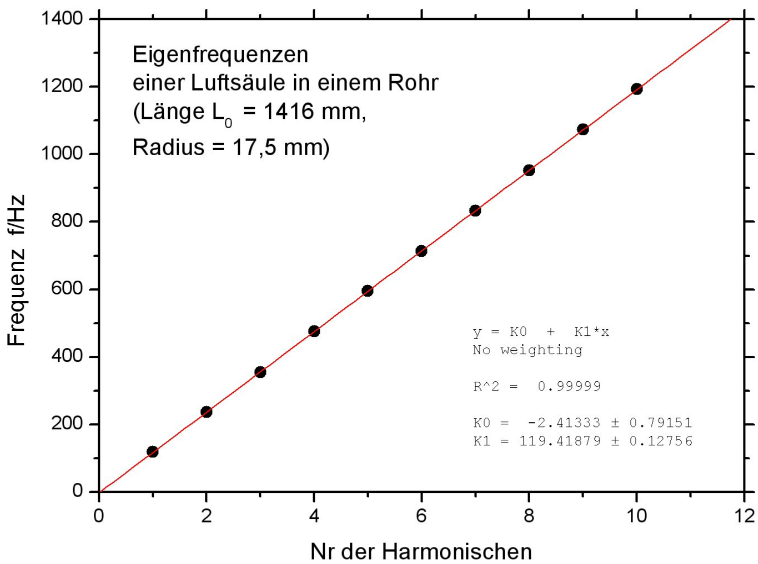

Abbildung 2 Eigenfrequenzen der ersten 10 Harmonischen einer Pfeife der Länge L_0 = 1,416 m

Trifft man beim Durchstimmen des *NF*-Generators auf eine Frequenz, die durch Gl. (4) gegeben ist, schwingt die Luft im Rohr mit und der Ton wird lauter. Das lässt sich nach Gehör feststellen oder objektiv mit einem Schallpegelmesser nachweisen. In Abbildung 1 besteht der Pegelmesser aus einem Mikrophon, einem *NF*-Verstärker und einem Gleichrichter mit nachfolgendem Tiefpass, dessen Ausgangsspannung mit einem Voltmeter gemessen wird. Die Frequenzen, bei denen der Pegelmesser einen erhöhten Ausschlag zeigt, sind die Frequenzen f_n der Harmonischen. In Tabelle 1 sind diese für ein Rohr der Länge L_0 = 1,416 m aufgelistet. Trägt man f_n als Funktion von n auf, liegen die Messpunkte, wie nach Gl. (4) erwartet, auf einer Geraden durch den Nullpunkt. Das zeigt Abbildung 2.

Tabelle 1 Eigenfrequenzen (Frequenzen der Harmonischen) f_n einer beiderseits offenen Pfeife der Länge L_0 = 1,416 m mit dem Rohrradius R = 0,0175 m. Mit n ist die Nummer der Harmonischen bezeichnet.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n/Hz	118,9	236,4	354,6	475	595	713	832	953	1073	1193

Nach Gl. (4) könnte man bei bekanntem L_0 aus der Steigung $c/(2L_0)$ der Geraden in Abbildung 2 die Schallgeschwindigkeit c (in Luft) bestimmen. Dem steht jedoch im Wege, dass der Druckausgleich an den Enden der Pfeife nicht genau am Rand des Rohres erfolgt, sondern weiter draußen. Erst diese Tatsache ermöglicht es im Übrigen, dass überhaupt Schall abgestrahlt wird. Denn würde die Schwingung der Luftmoleküle im Innern des Rohrs abrupt an dessen Enden zum Erliegen kommen, könnten die Moleküle im Außenraum nicht „mitgerissen" werden und die Schallschwingung nach draußen übertragen. Insofern ist das „Überschwappen" der Schwingung in den Außenraum Voraussetzung für die Funktion der Pfeife (siehe auch Anmerkung [1]). Man berücksichtigt dieses Überschwappen, indem man die Länge L_0 in Gl. (4) durch eine effektive Länge L ersetzt, die größer ist als L_0. Die Rechnung zeigt, dass die Vergrößerung der Rohrlänge proportional ist zum Radius R der Rohrquerschnittfläche. Es gilt

$$(5) \qquad L = L_0\left(1 + 2\alpha\frac{R}{L_0}\right)$$

Der Faktor α heißt *Endkorrektur* und wurde für unsere hier vorliegenden Randbedingungen zum ersten Mal von *Levine* und *Schwinger* [LevSch 48] berechnet [3]. Da unsere Endkorrektur an beiden Enden anzubringen ist, ist α in Gl. (5) mit dem Faktor 2 versehen. *Levine* und *Schwinger* erhielten für Radien R, die klein sind gegenüber der Wellenlänge λ, den Wert $\alpha = 0{,}6133$. Die Voraussetzung $R \ll \lambda$ ist in unserem Fall erfüllt, da der Radius R = 1,75 cm beträgt und die Wellenlänge von der Größenordnung 1 m ist.

Einen genauen Wert für die Schallgeschwindigkeit c erhält man nur, wenn die Endkorrektur α berücksichtigt wird. Durch Messungen an Rohren mit verschiedenen Werten für R/L_0 sollte es möglich sein, sowohl c als auch α zu bestimmen. In unserem Fall wurde bei konstantem R (= 1,75 cm) die Länge L_0 variiert [4]. Gemessen wurden jeweils die Frequenzen f_n der ersten 8 Harmonischen. Das Beispiel der Tabelle 1 und Abbildung 2 zeigt sogar die ersten 10 Harmonischen. Zur Auswertung der Daten überlegen wir folgendes: Ersetzt man in Gl. (4) die Länge L_0 durch die effektive Länge L nach Gl. (5), erhält man

$$(6) \qquad f_n = \frac{c}{2L_0\left(1 + 2\alpha\frac{R}{L_0}\right)} \cdot n \qquad (n = 1,2,3,...).$$

Das heißt, die Steigung der Geraden durch die Messpunkte der Abbildung 1 (und durch die Punkte der übrigen Messungen) sollte sein

$$(7) \qquad \frac{\Delta f_n}{\Delta n} = \frac{c}{2L_0\left(1 + 2\alpha\frac{R}{L_0}\right)}.$$

Daraus folgt, dass die mit $2L_0$ multiplizierte Steigung einen Term ergibt, der für kleine R/L_0 mit der Steigung $-2\alpha c$ gegen die Schallgeschwindigkeit c gehen sollte. Es ist nämlich

(8) $$2L_0 \frac{\Delta f_n}{\Delta n} = \frac{c}{1 + 2\alpha \frac{R}{L_0}} \cong c - 2\alpha c \frac{R}{L_0}.$$

Tabelle 2 zeigt die Messergebnisse und die daraus folgenden Größen $2L_0(\Delta f_n/\Delta n)$. Die in der Tabelle aufgeführten Werte von $2L_0(\Delta f_n/\Delta n)$ wurden als Funktion des Verhältnisses R/L_0

Tabelle 2 Die Steigung ($\Delta f_n/\Delta n$) der Ausgleichsgeraden durch die Messpunkte f_n als Funktion der Nummer n der Harmonischen (Abbildung 2 zeigt die Punkte für L_0 = 1,416 m). In Spalte 4 ist die Größe $2L_0(\Delta f_n/\Delta n)$ aufgelistet, die nach Gl. (8) zur Auswertung benutzt wurde (siehe Text). Die Länge L_0 des Rohr wurde variiert, der Radius der Querschnittsfläche des Rohrs war konstant R = 0,0175 m.

Länge L_0/m	R/L_0	$(\Delta f_n/\Delta n)$/Hz	$2L_0(\Delta f_n/\Delta n)$/m/s
0,352	0,0497	459,66 ± 2,29	323,60 ± 1,61
0,704	0,0249	237,08 ± 0,33	333,81 ± 0,47
1,057	0,0163	158,84 ± 0,34	335,79 ± 0,72
1,416	0,0123	119,42 ± 0,13	338,20 ± 0,37

aufgetragen. Abbildung 3 zeigt das Ergebnis. An die Messpunkte wurde eine Kurve gemäß Gl. (8) angepasst (χ^2/Freiheitsgrad = 1,19). Ihre Extrapolation für $R/L_0 \to 0$ ergab als Schallgeschwindigkeit c = 342,9 ± 0,7 m/s. Dieser Wert stimmt innerhalb der Fehlergrenzen mit

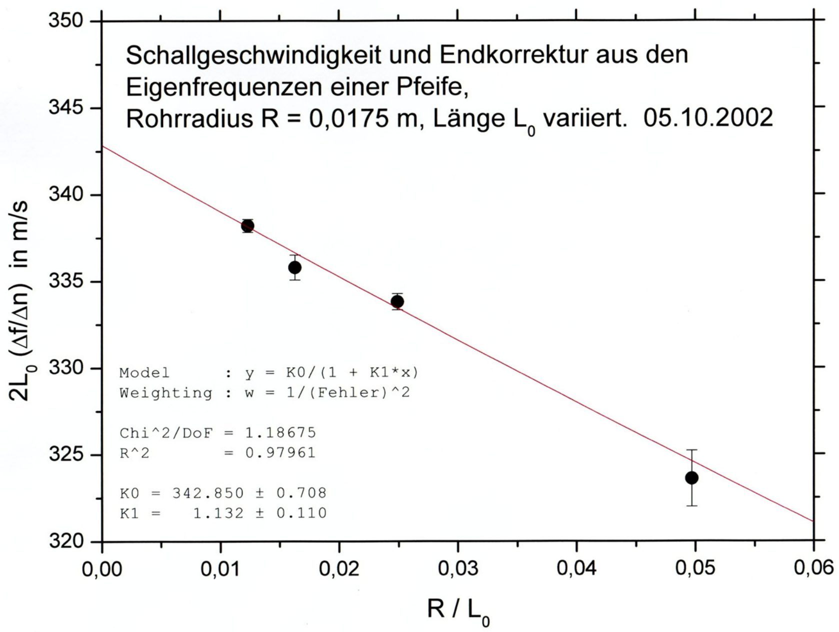

Abbildung 3 Messung der Schallgeschwindigkeit c und der Endkorrektur α.
Ergebnis: c = 342,9 ± 0,7 m/s, α = 0,57 ± 0,06

dem überein, den man für eine Umgebungstemperatur von 20° C theoretisch berechnet. Die Formel für die Schallgeschwindigkeit in einem (idealen) Gas lautet

(9) $$c = \sqrt{\kappa \frac{RT}{M}},$$

wobei κ = 1,402 der Adiabatenexponent für ein zweiatomiges Gas[5], R = 8,3145 J/(mol·K) die universelle Gaskonstante und M = 0,02896 kg/mol die Molmasse der Luft ist. Für eine

Temperatur von 20° C, entsprechend T = 293,15 K erhält man mit diesen Zahlenwerten als Schallgeschwindigkeit c = 343,5 m/s.

Für die Endkorrektur ergab das Experiment $\alpha = 0{,}57 \pm 0{,}06$, in sehr guter Übereinstimmung mit dem von *Levine* und *Schwinger* berechneten Faktor 0,6133. Die Genauigkeit des experimentellen Wertes beträgt in etwa 10%, für ein Schulexperiment kein schlechtes Ergebnis.

Anmerkungen

[1] Schon hier der Hinweis, dass diese Annahme physikalisch fragwürdig ist. Denn sie impliziert, dass die Luftmoleküle außerhalb der Pfeife von der Schwingung in ihrem Innern in keiner Weise „mitgerissen“ werden. Das heißt, die Pfeife würde keinerlei Schall abstrahlen – siehe die Diskussion weiter unten.

[2] Eine stehende Welle entsteht durch die Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen gleicher Frequenz und Amplitude. In der Pfeife wird eine einlaufende Welle am Ende des Rohrs reflektiert, läuft zurück und wird am gegenüber liegenden Ende wiederum reflektiert usw. – so bilden sich die beiden gegenläufigen Wellen.

[3] Für eine Pfeife, die in einer unendlich ausgedehnten Wand (in einem unendlich ausgedehnten „Flansch“) endet, so dass der Schall nur in einen Halbraum abgestrahlt wird, ergibt sich nach *Lord Rayleigh* [Ray 77] als Korrekturfaktor $\alpha = 0{,}82$. *Levine* und *Schwinger* [LevSch 48] berechneten den Faktor für eine Öffnung, die frei in den gesamten, unbegrenzten Außenraum übergeht, also für eine Geometrie, die der Realität (und damit unseren Randbedingungen) näher kommt.

[4] Der Durchmesser des Lautsprechers (Abbildung 1) sollte groß sein gegenüber dem des Rohres, zumindest aber größer als der des Rohres. Dann kann man davon ausgehen, dass die Pfeife in etwa durch ebene (Schall-)Wellen angeregt wird. Diese „Randbedingung“ liegt den Rechnungen von *Levine* und *Schwinger* [LevSch 48] zugrunde, die ein Schallfeld voraussetzen, das im Innern der Pfeife aus gegenläufigen ebenen Wellen besteht. Der Lautsprecher hatte einen Durchmesser von 5 cm, so dass der Rohrdurchmesser $2R$ = 3,5 cm die genannte Bedingung gerade erfüllt. Somit wären größere Rohrradien nicht sinnvoll gewesen. Papprohre mit kleineren Radien hätten sich nicht gut zu Schwingungen anregen lassen – zumindest in unserer Versuchsanordnung. Deshalb wurde im Experiment nicht R, sondern L_0 variiert.

[5] Der Adiabatenexponent ist bekanntlich der Quotient der (molaren) spezifischen Wärmen, also $\kappa = C_p/C_v$.

Literatur

Ger 02	Gerthsen, Physik, 21. Auflage, (2002), Kapitel 4.4.3
LevSch 48	Levine, H. und J. Schwinger: Phys. Rev. **73**, 383 (1948)
Ray 77	Lord Rayleigh: Roy. Soc. Trans. **161**, 77 (1870); Phil. Mag. **3**, 456 (1877)